



نمونه سوالات دروس تخصصی

ویژه دوازدهم ریاضی



📍 آدرس : زیر پل سیدخندان، ابتدای سهروردی شمالی، جنب بانک صادرات، پلاک ۷۱۰

☎ شماره تلفن : ۸۸۷۴۴۱۴۳-۸۸۷۴۴۱۷۹

📷 آدرس اینستاگرام : oloum_konkur

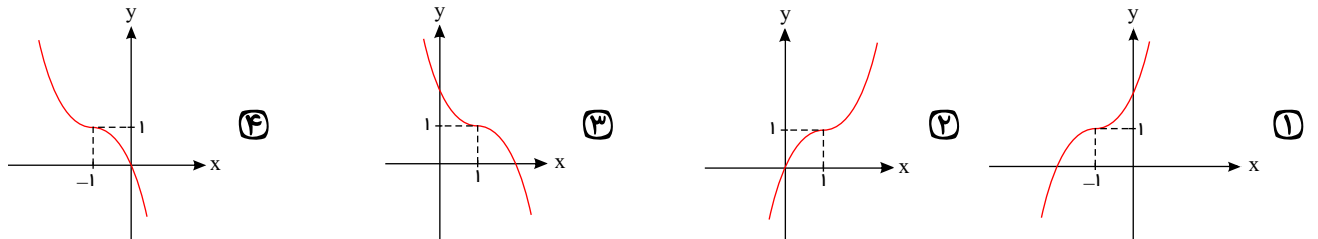
📖 ارائه خدمات : کلاس های حضوری-کنکور-تقویتی-مشاوره فردی-مشاوره گروهی-آزمون-طرح مدرسه-غیرحضوری

نمونه سوالات ریاضی دوازدهم

۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ از کدام یک از نواحی دستگاه مختصات عبور نمی کند؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۲- نمودار تابع $y = -(x+1)^3 + 1$ کدام است؟



۳- اگر بزرگترین بازه‌ای را که تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & -1 < x \leq 2 \\ -3 & -4 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & -9 \leq x < -4 \end{cases}$ در آن صعودی باشد به صورت $[a, b]$ نشان دهیم، $b - a$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۱ (۴)

۴- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = |x - 2| + x$ صحیح است؟

- اکیداً صعودی است. (۱) اکیداً نزولی است. (۲) صعودی است. (۳) نزولی است. (۴)

۵- نمودار تابع $y = -2x^2$ را ۲ واحد به سمت x های منفی و ۳ واحد به سمت y های مثبت انتقال داده‌ایم. معادله سهمی جدید چگونه است؟

- (۱) $y = 2x^2 - 8x - 5$ (۲) $y = -2x^2 - 8x + 5$ (۳) $y = -2x^2 - 8x - 5$ (۴) $y = 2x^2 - 8x + 5$

۶- نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - 4$ را ۲ واحد به طرف x های منفی و سپس ۳ واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار تابع جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع چهارم است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(0, +\infty)$

۷- نمودار تابع $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-3,5$ (۲) -3 (۳) $-2,5$ (۴) -2

۸- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

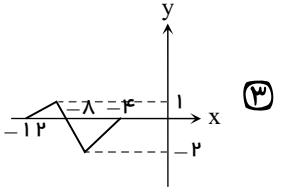
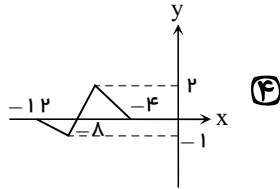
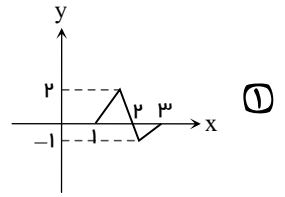
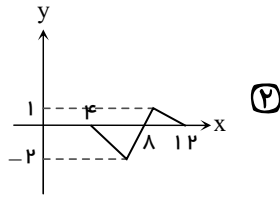
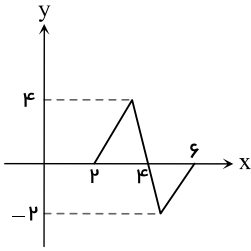
- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

۹- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -2 (۲) $0,5$ (۳) 1 (۴) $1,5$



۱۰- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = -\frac{1}{3}f(-\frac{1}{3}x)$ به کدام شکل است؟



۱۱- اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت $R_f = (-4, 5]$ باشد، برد تابع $g(x) = -2f(3x) + 7$ کدام است؟

- (۱) $(-3, 15]$ (۲) $[-3, 15]$ (۳) $[-9, 45]$ (۴) $(-9, 45]$

۱۲- در مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+2}{5-x} \leq -2$ ، چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) بی شمار

۱۳- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x+6}{x^2+ax+b} \leq 0$ به صورت $(-\infty, -5) \cup [-3, 2)$ باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) ۲۰ (۳) -۳۰ (۴) ۳۰

۱۴- نمودار $y = \frac{6x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 5$ قرار دارد مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۵- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

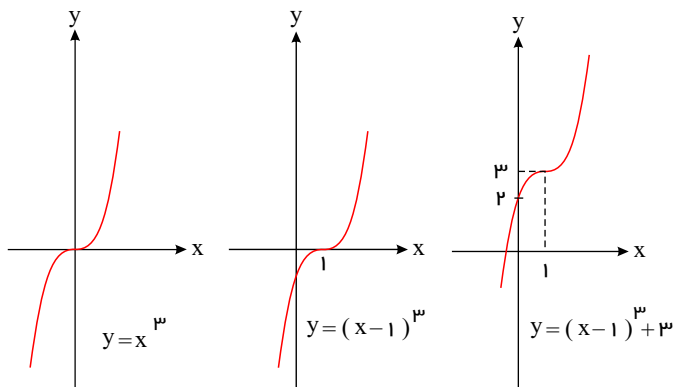


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

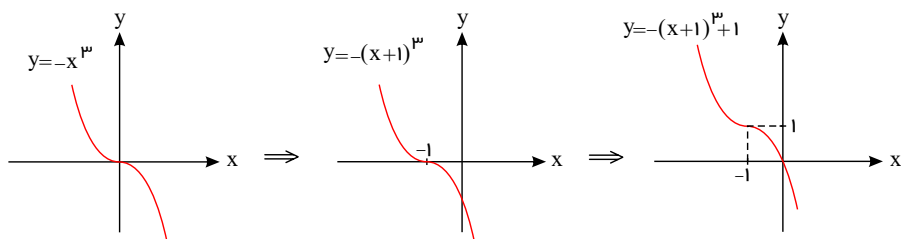
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = (x-1)^3 + 3$$

برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

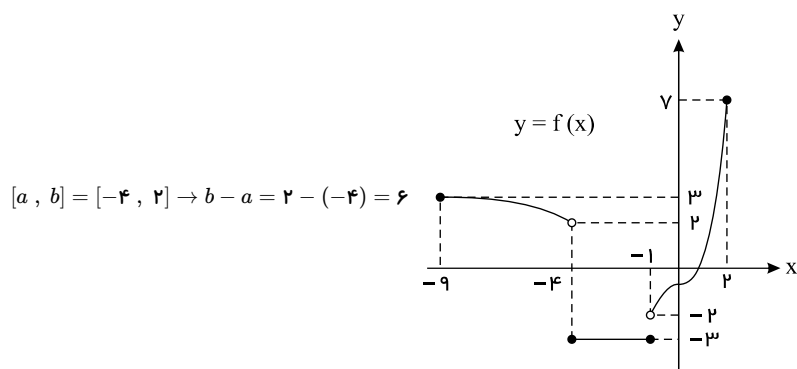


همانطور که مشاهده می‌کنید نمودار تابع f از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

۲ - گزینه ۴ برای رسم $y = -(x+1)^3 + 1$ باید نمودار $y = -x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم.



۳ - گزینه ۳ ابتدا تابع سه ضابطه‌ای $f(x)$ را رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار رسم شده، بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن صعودی است، بازه $[-4, 2]$ است، بنابراین:



توجه کنید که برای رسم $y = x^3 - 1$ کافی است که تابع $y = x^3$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم و برای رسم $y = \sqrt{-x}$ کافی است تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور عرض قرینه کنیم.

۴ - گزینه ۳

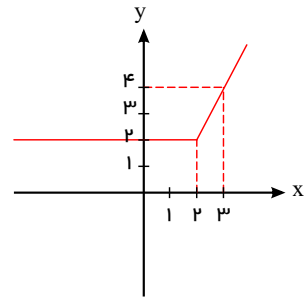
باید نمودار تابع را رسم کنیم که برای این کار با توجه به ریشه داخل قدرمطلق یعنی $x = 2$ دو محدوده در نظر می‌گیریم.

$$x < 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) + x = 2$$

$$x \geq 2 \Rightarrow f(x) = x - 2 + x = 2x - 2$$



$$\text{پس: } f(x) = \begin{cases} 2 & x < 2 \\ 2x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 & | \\ 2 & | \\ 3 & | \\ 4 & \end{cases}$$



تابع صعودی است.

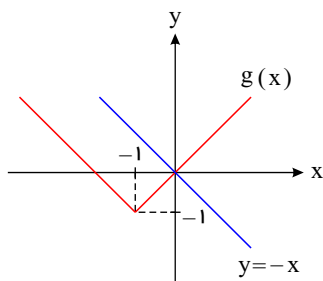
۵ - گزینه ۳ اگر سهمی $y = -2x^2$ را ۲ واحد به طرف x های منفی ببریم باید x را به $x + 2$ تبدیل کرد که به معادله $y = -2(x + 2)^2$ می‌رسیم. حال اگر این سهمی را ۳ واحد به طرف y های مثبت ببریم به سهمی $y = -2(x + 2)^2 + 3$ خواهیم رسید:

$$y = -2(x + 2)^2 + 3 = -2(x^2 + 4x + 4) + 3 = -2x^2 - 8x - 5$$

۶ - گزینه ۴

$$f(x) = |x - 1| - 4 \Rightarrow g(x) = |x - 1 + 2| - 4 + 3 \Rightarrow g(x) = |x + 1| - 1$$

نمودار دو تابع $g(x) = |x + 1| - 1$ و نیمساز ربع چهارم یعنی $y = -x$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(0, +\infty)$ نمودار تابع g بالاتر از نمودار نیمساز ربع چهارم است.

البته به جای رسم نمودار دو تابع می‌توان نامعادله $|x + 1| - 1 > -x$ را حل کرد.

۷ - گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به صورت $y = |\frac{1}{4}(x + 4)| - 2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به صورت $y = |\frac{1}{4}(x + 4)| - 2 + 1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}} = |\frac{1}{4}x| - 2 \\ y_{\text{جدید}} = |\frac{1}{4}x + 2| - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{1}{4}x| - 2 = |\frac{1}{4}x + 2| - 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} |x| - 8 = |x + 8| - 4 \Rightarrow |x| - |x + 8| = 4 \xrightarrow{\text{مشاهده گزینه‌ها}} x = -3$$

۸ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محور } x} g(x) = \sqrt{x - 12} \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محورها}} h(x) = \sqrt{x - 12} + 2$$

$$\text{تلاقی: } \sqrt{x} = \sqrt{x - 12} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x = x - 12 + 4 + 4\sqrt{x - 12} \rightarrow 8 = 4\sqrt{x - 12} \rightarrow 2 = \sqrt{x - 12}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4 = x - 12 \rightarrow x = 16 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 4$$

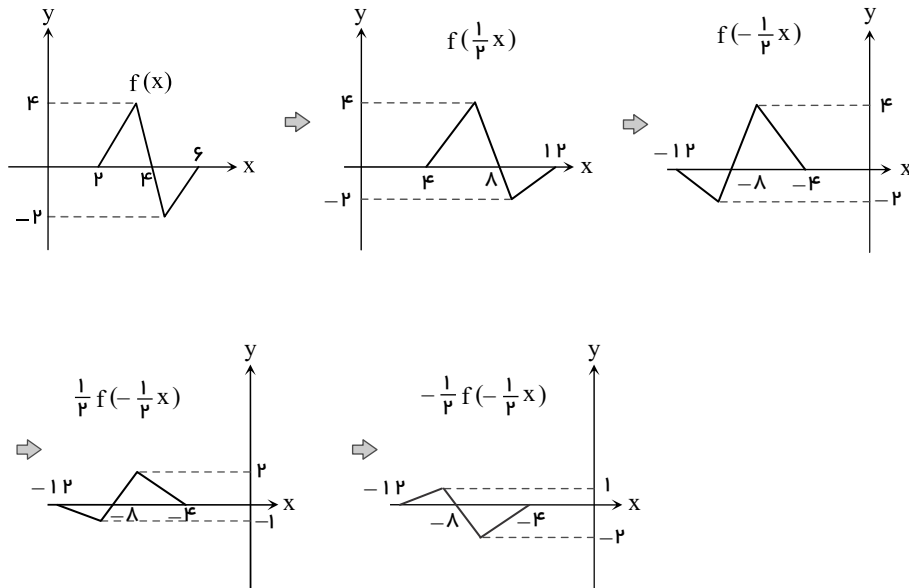
$$\text{پس: } A \left| \frac{16}{4} \right|, O \left| \frac{0}{4} \right| \rightarrow AO = \sqrt{(16 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16^2 + 16} = \sqrt{16(16 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

۹ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{دو واحد به طرف های مثبت}} h(x) = \sqrt{-(x - 2)} = \sqrt{-x + 2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x + 2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x + 2} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} -x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{غرض (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ \text{ق} \end{matrix}$$



۱۱ - گزینه ۲ طول نقاط در تابع $f(x)$, $\frac{1}{3}$ برابر شده است که روی برد تأثیر ندارد، سپس عرض نقاط، -۲ برابر شده است و نهایتاً شکل، ۷ واحد به سمت بالا برده شده است.

$$R_f = (-۴, ۵] \xrightarrow{\text{عرض نقاط برابر}} [-۱۰, ۸] \xrightarrow{\text{۷ واحد به سمت بالا}} R_g = [-۳, ۱۵)$$

۱۲ - گزینه ۲

$$I) \frac{۳x+۲}{۵-x} < ۳ \Rightarrow \frac{۳x+۲}{۵-x} - ۳ < 0 \Rightarrow \frac{۶x-۱۳}{۵-x} < 0 \Rightarrow \frac{۶x-۱۳}{۵-x}$$

x	$\frac{13}{6}$	۵
	-	+
	-	-

ت ن

$$\Rightarrow x < \frac{13}{6} \text{ یا } x > ۵$$

$$II) -۲ \leq \frac{۳x+۲}{۵-x} \Rightarrow \frac{۳x+۲}{۵-x} + ۲ \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1۲}{۵-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1۲}{۵-x}$$

x	-۱۲	۵
	-	+
	-	-

ت ن

$$\Rightarrow -۱۲ \leq x < ۵ \xrightarrow{(I) \cap (II)} -۱۲ \leq x < \frac{13}{6}$$

پس در مجموعه جواب نامعادله ۱۵ عدد صحیح $\{-۱۲, -۱۱, \dots, ۲\}$ وجود دارد.

۱۳ - گزینه ۳ با توجه به مجموعه جواب، ریشه معادله صورت -۳ و x و ریشه‌های مخرج ۲ ، -۵ است. بنابراین معادله مخرج به صورت $(x+۵)(x-۲)$ است. بنابراین:

$$(x+۵)(x-۲) = x^2 + ۳x - ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow ab = -۳۰$$

۱۴ - گزینه ۲

$$\frac{۶x^۲-۳x+۷}{x^۲+۱} < ۵ \Rightarrow \frac{۶x^۲-۳x+۷}{x^۲+۱} - ۵ < 0 \Rightarrow \frac{۶x^۲-۳x+۷-۵x^۲-۵}{x^۲+۱} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۱} < 0$$

$x^۲+۱$ همواره مثبت است پس تأثیری در جواب ندارد.

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲ < 0$$

$$x^۲-۳x+۲ = 0 \Rightarrow (x-۲)(x-۱) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

$$(a, b) = (۱, ۲) \Rightarrow ab = ۱ \times ۲ = ۲$$

پس مقدار ab ، ۲ خواهد شد.

۱۵ - گزینه ۳ می‌دانیم:

عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ فاقد ریشه و همواره مثبت است هرگاه:

x	$-\infty$	۱	۲	$+\infty$
$x^۲-۳x+۲$		+	-	+



$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره منفی است هرگاه:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x-1)(x+1) + x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - (x^2 - 1) + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x^2 + 1 + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ x^2 + x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -3 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره مثبت} \end{cases}$$

	-1		0	
$x^2 + x + 1$	+		+	+
$x^2 + x$	+	o	-	o
$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$	+	تن	-	تن

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴

۲ - ۴

۳ - ۳

۴ - ۳

۵ - ۳

۶ - ۴

۷ - ۲

۸ - ۳

۹ - ۳

۱۰ - ۳

۱۱ - ۲

۱۲ - ۲

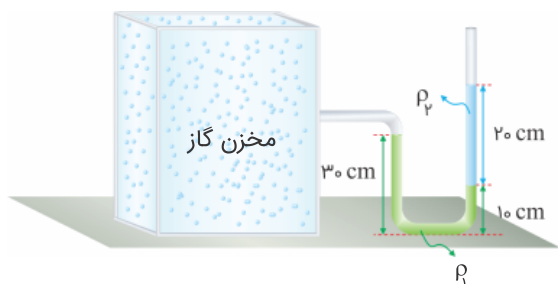
۱۳ - ۳

۱۴ - ۲

۱۵ - ۳

نمونه سوالات فیزیک دوازدهم

۱ در شکل زیر فشار پیمانه‌ای گاز داخل مخزن برابر با 8 kPa است. اختلاف چگالی دو مایع نشان داده شده چند واحد SI است؟



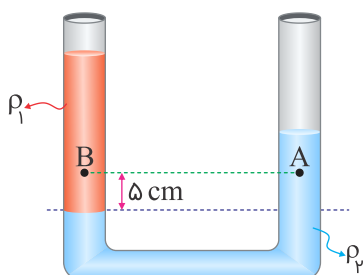
(۱) ۲۰۰۰

(۲) ۳۰۰۰

(۳) ۴۰۰۰

(۴) ۶۰۰۰

۲ در شکل زیر دو مایع مخلوط نشدنی به چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 در یک لوله U شکل قرار دارند. اگر اختلاف فشار در نقاط A و B برابر 100 Pa باشد، کدام گزینه درست است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



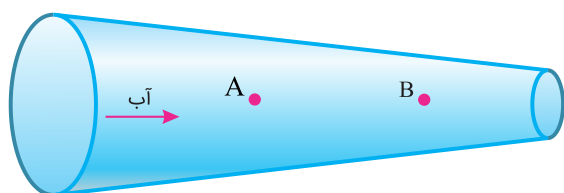
(۱) $\rho_2 - \rho_1 = 200 \text{ kg/m}^3$

(۲) $\rho_1 - \rho_2 = 200 \text{ kg/m}^3$

(۳) $\rho_2 + \rho_1 = 200 \text{ kg/m}^3$

(۴) $\rho_2 - 5\rho_1 = 200 \text{ kg/m}^3$

۳ در لوله افقی شکل زیر آب جریان دارد. فشار و تندی آب در نقطه A به ترتیب P_A و v_A و در نقطه B، P_B و v_B است. کدام مقایسه در مورد فشار و تندی آب در این دو نقطه به درستی صورت گرفته است؟



(۱) $v_A > v_B, P_A < P_B$

(۲) $v_A < v_B, P_A > P_B$

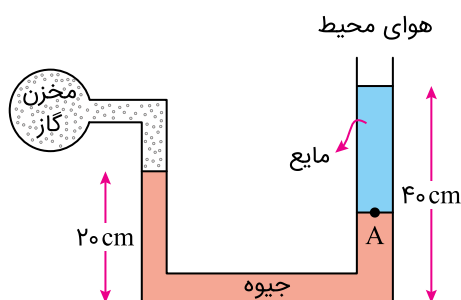
(۳) $v_A < v_B, P_A < P_B$

(۴) $v_A > v_B, P_A > P_B$

۴

در شکل مقابل، جیوه و مایع در حال تعادل اند و فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن، $10/9 \text{ kPa}$ - است. فشار پیمانه‌ای در سطح تماس مایع با جیوه (نقطه A)، چند کیلوپاسکال است؟

$$(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{مایع}} = 0/9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$$



$$2/7 \quad (1)$$

$$3/6 \quad (2)$$

$$7/2 \quad (3)$$

$$16/3 \quad (4)$$

۵

یک خودروی مسابقه در حال حرکت است. اگر برای افزایش تندی این خودرو از سرعت ۷ به سرعت ۲۷، کاری برابر با W_1 انجام شود، برای افزایش تندی همین خودرو از سرعت ۲۷ به سرعت ۳۷، مقدار کار W_2 باید روی آن انجام شود. نسبت W_1 به W_2 چقدر است؟ (فرض کنید جرم خودرو ثابت است و هیچ نیروی اتلافی وجود ندارد.)

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

۶

با انجام کار خالص 200 J بر روی یک جسم، تندی آن $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ افزایش یافته است. اگر 200 J دیگر، کار روی جسم انجام شود، تندی آن $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ افزایش می‌یابد. تندی اولیه جسم (قبل از انجام کارها)، چند متر بر ثانیه بوده است؟

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

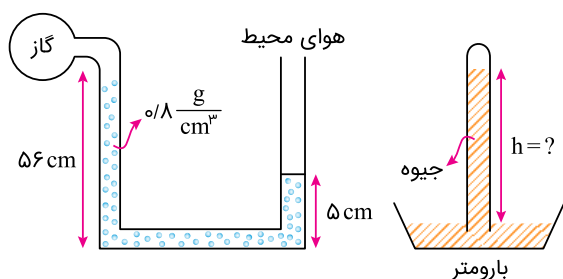
$$4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

۷

در شکل زیر، فشار مطلق گاز درون مخزن، 70 cm Hg است و درون لوله U شکل، مایعی با چگالی $0/8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ قرار دارد. ارتفاع جیوه در لوله بارومتر که فشار هوای محیط را نشان می‌دهد، چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)



$$67 \quad (1)$$

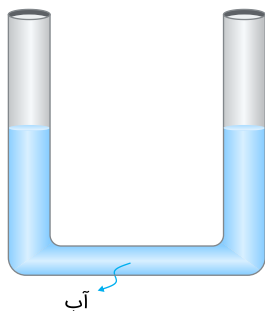
$$69 \quad (2)$$

$$71 \quad (3)$$

$$73 \quad (4)$$

۸

در شکل زیر چند گرم روغن با چگالی $\frac{8}{\text{cm}^3} \text{g}$ با شاخه سمت راست با مساحت 8 cm^2 اضافه کنیم تا اختلاف ارتفاع آزاد آب و روغن در دو ستون برابر 18 cm شود؟ $\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و مساحت مقطع سمت چپ لوله 2 cm^2 است.



(۱) ۵۷۶

(۲) ۶۴

(۳) ۱۴۴

(۴) ۲۹۶

۹

از دو فلز A و B با چگالی‌های $\rho_A = 8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $\rho_B = 19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ آلیاژی با چگالی $13 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ساخته شده است. اگر جرم آلیاژ برابر 2860 g باشد، چند گرم آلیاژ از فلز A ساخته شده است؟

(۲) ۹۶۰

(۱) ۸۶۰

(۴) ۲۰۰۰

(۳) ۱۹۰۰

۱۰

تندی جسمی به جرم 400 g از v به $v + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد. اگر انرژی جنبشی جسم، $6/6 \text{ J}$ افزایش یافته باشد، انرژی جنبشی جسم، قبل از تغییر تندی، چند ژول بوده است؟

(۲) ۳/۲

(۱) ۳

(۴) ۹/۸

(۳) ۹/۶

۱۱

دو قایق موتوری A و B در حال حرکت در یک دریاچه هستند. جرم قایق A چهار برابر جرم قایق B است ولی انرژی جنبشی آن، نصف انرژی جنبشی قایق B است. اگر قایق A سرعت خود را 2 m/s افزایش دهد، انرژی جنبشی دو قایق برابر می‌شود. تندی اولیه قایق A چند متر بر ثانیه است؟

(۲) $2\sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2} + 2$

(۴) ۲

(۳) ۳

۱۲

در یک اندازه‌گیری توسط یک ترازوی مدرج $2/92 \text{ kg}$ گزارش شده است. دقت این ترازو گرم است. (درجه بندی ترازو مضارب ۱۰ می باشد)

(۲) ۰/۰۱

(۱) ۱۰

(۴) ۱۰۰۰

(۳) ۰/۱

۱۳

شعاع استوانه توپر A، ۲ برابر شعاع خارجی استوانه B و شعاع داخلی استوانه B نصف شعاع خارجی آن است. اگر جرم و ارتفاع استوانه A، ۳ برابر جرم و ارتفاع استوانه B باشد، $\frac{\rho_A}{\rho_B}$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} (۲) \quad \frac{۳}{۱۶} \\ (۴) \quad \frac{۱}{۸} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (۱) \quad \frac{۹}{۱۶} \\ (۳) \quad \frac{۳}{۸} \end{array}$$

۱۴

۴۰۰ میلی‌لیتر از مایعی به چگالی $۱ \frac{g}{cm^3}$ را با ۶۰۰ میلی‌لیتر از مایعی به چگالی $۱/۲ \frac{g}{cm^3}$ مخلوط می‌کنیم. با این مخلوط، ظرف استوانه‌ای شکلی به عمق ۵۰ cm را پر می‌کنیم. فشار پیمانه‌ای در کف این ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g = ۱۰ \frac{N}{kg}$)

$$(۲) \quad ۴۸$$

$$(۱) \quad ۴/۸$$

$$(۴) \quad ۵۶۰$$

$$(۳) \quad ۵/۶$$

۱۵

یک مکعب توپر به ضلع ۵ سانتی‌متر از دو فلز به چگالی‌های $\rho_B = ۴ \frac{g}{cm^3}$ و $\rho_A = ۸ \frac{g}{cm^3}$ ساخته شده است. اگر جرم مکعب ۵/۶ کیلوگرم باشد، حجم بخش ساخته‌شده از فلز A چند سانتی‌متر مکعب است؟

$$(۲) \quad ۲۵$$

$$(۱) \quad ۱۰۰$$

$$(۴) \quad ۷۵$$

$$(۳) \quad ۵۰$$

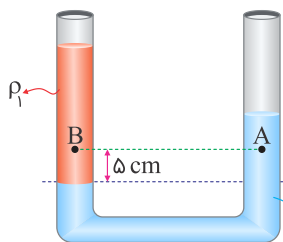
در این گونه مسائل، با انتخاب یک سطح هم‌تراز مناسب و برابر قرار دادن فشار در دو طرف آن به‌سادگی به جواب خواهیم رسید.
نکته: فشار پیمانه‌ای برابر است با اختلاف فشار گاز با فشار جو.

$$P_{\text{سمت چپ}} = P_{\text{سمت راست}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + P_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای}} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \Rightarrow -8000 = \rho_2 \times 10 \times (0/2) - \rho_1 \times 10 \times (0/2)$$

$$\Rightarrow -8000 = 2(\rho_2 - \rho_1) \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = -4000 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = 4000 \text{ kg/m}^3$$

فشار در سطح تراز یکسان بوده و فشار را در این نقاط برابر P می‌گیریم.
نقطه B ، 5 cm بالاتر از سطح تراز بوده و فشار در نقطه A برابر $P - \rho_1 g \frac{5}{100}$ است.
نقطه A ، 5 cm بالاتر از سطح تراز بوده و فشار در نقطه B برابر $P - \rho_2 g \frac{5}{100}$ است.



باتوجه به اینکه مایعی که چگالی بیشتری دارد ته‌نشین می‌شود پس چگالی مایع (۲) بیشتر از چگالی مایع (۱) است:

$$\begin{aligned} P_B &= P - \rho_1 g \frac{5}{100} \\ P_A &= P - \rho_2 g \frac{5}{100} \end{aligned} \xrightarrow{\rho_2 > \rho_1} P_B > P_A$$

اختلاف فشار داده شده در واقع $P_B - P_A$ است:

$$\begin{aligned} P_B - P_A &= 100 \text{ Pa} \Rightarrow P - \rho_1 \times 10 \times \frac{5}{100} - (P - \rho_2 \times 10 \times \frac{5}{100}) = 100 \\ \Rightarrow \frac{\rho_2}{2} - \frac{\rho_1}{2} &= 100 \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = 200 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

چون سطح مقطع لوله در نقطه A بیشتر از سطح مقطع لوله در نقطه B است، از طرفی آهنگ حجمی آب عبوری در کل لوله یکسان است، تندی آب در بخش پهن (نقطه A) کمتر و طبق قانون برنولی فشار در نقطه A بیشتر است.

برای محاسبه فشار پیمانه‌ای نقطه A، لازم است که ابتدا ارتفاع جیوه و مایع در شاخه سمت راست معلوم شود.

$$P_{\text{شاخه چپ}} = P_{\text{شاخه راست}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} + P_{\text{جیوه}} = P_{\text{مایع}} + P_o$$

$$P_{\text{گاز}} - P_o + 13600 \times 10 \times 0.2 = 13600 \times 10 \times h + 900 \times 10 \times (0.4 - h)$$

$$\Rightarrow -10/9 \times 10^3 + 27200 = 12700h + 3600 \Rightarrow \begin{cases} h = 0.1 \text{ m} \\ h'_{\text{مایع}} = 0.4 - 0.1 = 0.3 \text{ m} \end{cases}$$

فشار پیمانه‌ای (مایع نقطه A): $P_{\text{مایع}} - P_o = \rho gh = 900 \times 10 \times 0.3 = 2700 \text{ Pa} = 2.7 \text{ kPa}$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_o^2) = \frac{1}{2} m (4v^2 - v^2) = \frac{3}{2} mv^2 (1)$$

$$W'_t = \Delta K' \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2} m ((3v)^2 - (2v)^2) = \frac{1}{2} m (9v^2 - 4v^2) = \frac{5}{2} mv^2$$

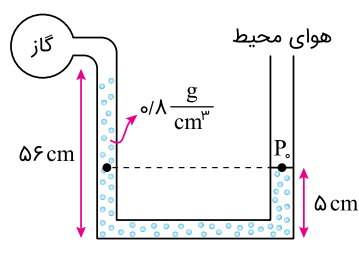
$$\Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{5}{2} mv^2}{\frac{3}{2} mv^2} = \frac{5}{3}$$

قضیه کار - انرژی جنبشی را برای هر دو حالت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} W_1 = K_2 - K_1 \\ W_2 = K_3 - K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 = \frac{1}{2} m ((v+2)^2 - v^2) \\ 200 = \frac{1}{2} m ((v+3)^2 - (v+2)^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (v+2)^2 - v^2 = (v+3)^2 - (v+2)^2 \Rightarrow 4v + 4 = 2v + 5 \Rightarrow v = \frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

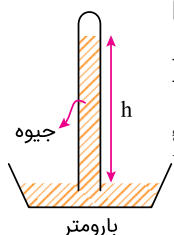
در این سؤال، نیازی نیست فشار برحسب پاسکال محاسبه شود، بلکه برحسب سانتی‌متر جیوه، مناسب‌تر است. ابتدا فشار مایع درون لوله U شکل را برای اختلاف ارتفاع، برحسب سانتی‌متر جیوه محاسبه می‌کنیم:



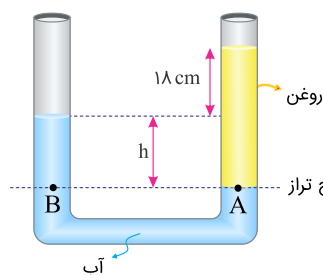
$$\rho_1 h_1 = \rho_H g h_2 \Rightarrow 0.8(56 - 5) = 13.6 h_2 \Rightarrow h_{HG} = 3 \text{ cm Hg}$$

$$P_{\text{گاز}} + P_{\text{مایع}} = P_0 \Rightarrow 70 \text{ cm Hg} + 3 \text{ cm Hg} = P_0 \Rightarrow P_0 = 73 \text{ cm Hg}$$

ارتفاع جیوه در لوله بارومتر، باید ۷۳ cm باشد. (فضای بالای لوله بارومتر، خلأ است.)



براساس خواسته مسأله، شکل نهایی لوله را با دو مایع ترسیم می‌کنیم؛ سپس با انتخاب سطح جدایی روغن و آب به‌عنوان سطح تراز، معادلهٔ برابری فشار را برای آن نقاط می‌نویسیم:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow 1 \times h = 0.8(18 + h) \Rightarrow 0.2h = 0.8 \times 18 \Rightarrow h = 72 \text{ cm}$$

پس ارتفاع ستون روغن برابر است با:

$$H = h + 18 = 72 + 18 = 90 \text{ cm}$$

در پایان بر مبنای سطح مقطع و ارتفاع و چگالی روغن، جرم آن به‌دست می‌آید:

$$m = \rho V = \rho A h = 0.8 \times 8 \times 90 = 576 \text{ g}$$

روش اول:

حجم آلیاژ ساخته شده برابر است با:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 13 = \frac{2860}{V} \Rightarrow V = \frac{2860}{13} = 220 \text{ cm}^3$$

و چون جرم آلیاژ را هم داریم، می‌توانیم دو معادله زیر را بنویسیم:

$$1) m_A + m_B = 2860 \text{ g}$$

$$2) V_A + V_B = 220 \text{ cm}^3$$

و چون چگالی‌های A و B را داریم، جرم را می‌توانیم به صورت $m = \rho V$ بنویسیم:

$$m_B = 19V_B, \quad m_A = 8V_A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8V_A + 19V_B = 2860 \\ V_A + V_B = 220 \end{cases} \Rightarrow 11V_A = 1320 \Rightarrow V_A = 120 \text{ cm}^3$$

و به این ترتیب، جرم ماده A برابر است با:

$$m_A = 8 \times 120 = 960 \text{ g}$$

روش دوم:

می‌توانیم براساس اختلاف چگالی آلیاژ با چگالی هریک از مواد، نسبت حجم آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\left| \frac{\rho' - \rho_A}{\rho' - \rho_B} \right| = \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{13 - 8}{19 - 13} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{5}{6}$$

و چون حجم کل آلیاژ برابر با $V_{\text{کل}} = V_A + V_B = \frac{2860}{13} = 220 \text{ cm}^3$ است، داریم:

$$V_A + \frac{5}{6}V_A = 220 \Rightarrow V_A = 120 \text{ cm}^3$$

و جرم فلز A برابر است با:

$$m_A = 8 \times 120 = 960 \text{ g}$$

رابطه تغییرات انرژی جنبشی جسم را می‌نویسیم تا v به دست بیاید:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow 6/6 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times ((v + 3)^2 - v^2) \Rightarrow 33 = 6v + 9 \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حالا انرژی جنبشی جسم به ازای تندی v (انرژی جنبشی اولیه) را به دست می‌آوریم:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times 4^2 = 3/2 \text{ J}$$

حالت اول:

$$\left. \begin{array}{l} m_A = 4m_B \\ K_A = \frac{1}{4}K_B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4}m_A v_A^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}m_A v_B^2 \Rightarrow v_B = 2v_A$$

حالت دوم: وقتی که قایق A به تندی خود $2m/s$ اضافه می‌کند، انرژی جنبشی هر دو برابر می‌شود. پس:

$$K'_A = K_B \Rightarrow \frac{1}{4}m_A v'^2_A = \frac{1}{4}m_B v_B^2 \Rightarrow 2(v_A + 2)^2 = (2v_A)^2$$

$$\Rightarrow (v_A + 2)^2 = 2v_A^2 \Rightarrow v_A = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2} + 2$$

برای تعیین دقت ترازو، باید به کوچکترین واحدی که ترازو می‌تواند اندازه‌گیری کند توجه کنیم. در اینجا، عدد $2/92 \text{ kg}$ به صورت دو رقم اعشار گزارش شده است. این به این معناست که دقت ترازو تا 0.01 kg است. از آنجا که درجه بندی ترازو مضارب ۱۰ می‌باشد، دقت ترازو در گرم برابر با 10 g است.

$$\left. \begin{array}{l} R_A = 2R_B \\ R_B = 2r_B \\ m_A = 3m_B \\ h_A = 3h_B \end{array} \right\} \text{طبق داده‌های مسئله:}$$

از رابطهٔ نسبی چگالی کمک می‌گیریم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{\pi(R_B^2 - r_B^2)h_B}{\pi R_A^2 h_A}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{3m_B}{m_B} \times \frac{(R_B^2 - \frac{R_B^2}{4})h_B}{4R_B^2 \times (3h_B)} = 3 \times \frac{\frac{3}{4}}{4 \times 3} = \frac{3}{16}$$

ابتدا چگالی مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_{00} + V_{00}}$$

$$= \frac{400 + 720}{1000} = \frac{1120}{1000} = 1/12 \text{ g/cm}^3$$

حال فشار پیمانه‌ای ناشی از مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$P_g = P - P_o = \rho gh = 1/12 \times 10^3 \times 10 \times 0/5$$

$$= 5600 \text{ Pa} = 5/6 \text{ kPa}$$

$$V_{\text{ج}} = a^3 = \omega^3 = 125$$

$$m_{\text{ج}} = m_A + m_B \Rightarrow \epsilon_{00} = \lambda V_A + 4(125 - V_A)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{00} = \lambda V_A + \omega_{00} - 4V_A \Rightarrow 100 = 4V_A \Rightarrow V_A = 25 \text{ cm}^3$$

نمونه سوالات شیمی دوازدهم

- ۱- از میان عبارت‌های زیر کدام عبارت‌ها دربارهٔ عنصرهای دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای نادرست است؟ مرجع: ۱۴۰۰ smart-
- (آ) در آرایش الکترونی اتم پنج عنصر، زیرلایهٔ نیمه‌پر وجود دارد.
 (ب) در آرایش الکترونی اتم پنج عنصر، بیرونی‌ترین زیرلایه تک‌الکترونی است.
 (پ) در آرایش الکترونی اتم هفت عنصر، لایهٔ الکترونی سوم پر است.
 (ت) فلزهای اصلی واقع در آن با از دست دادن الکترون‌های ظرفیتی به آرایش هشتایی می‌رسند.
 (ث) مجموع عددهای کوانتومی فرعی الکترون‌های ظرفیتی عنصرهای اصلی واقع در آن برابر ۲۱ است.
- ① ب و پ و ث ② الف و ث ③ ب و پ و ث ④ الف و ث

- ۲- کدام گزینه در مورد ${}_{25}X$ و ${}_{53}Y$ درست است؟ مرجع: ۱۴۰۰ smart-
- ① ${}_{53}Y$ دو دوره بعد از ${}_{25}X$ قرار دارد.
 ② اختلاف شمارهٔ گروه آنها برابر هشت است.
 ③ تعداد الکترون ظرفیتی آنها یکسان است.
 ④ تعداد زیرلایهٔ اشغال‌شده ${}_{53}Y$ دو برابر ${}_{25}X$ است.

- ۳- در میان عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی عنصر دارای آخرین زیرلایهٔ نیمه‌پر هستند و در لایهٔ سوم کاتیون ${}_{24}X^{3+}$ الکترون وجود دارد. (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید). مرجع: ۱۳۹۹ smart-
- ① ۹ - ۲ ② ۱۱ - ۳ ③ ۱۱ - ۲ ④ ۹ - ۳

- ۴- تعداد الکترون‌های با $l = ۱$ چند برابر تعداد الکترون‌های با $l = ۰$ در چهارمین عنصر دستهٔ d جدول دوره‌ای است؟ مرجع: ۱۳۹۸ smart-
- ① $\frac{۱۲}{۶}$ ② $\frac{۱۲}{۷}$ ③ $\frac{۱۳}{۶}$ ④ $\frac{۱۳}{۷}$

- ۵- تعداد الکترون‌های موجود در زیرلایهٔ $3d$ کدام جفت گونه‌های زیر با یکدیگر برابر نیست؟ مرجع: ۱۳۹۸ smart-
- ① ${}_{26}Fe^{3+}$, ${}_{25}Mn^{2+}$ ② ${}_{26}Fe^{2+}$, ${}_{25}Mn^{4+}$
 ③ ${}_{30}Zn^{2+}$, ${}_{31}Ga^{3+}$ ④ ${}_{30}Zn$, ${}_{31}Ga^{3+}$

- ۶- در چند مورد، نام و فرمول شیمیایی ذکر شده صحیح است؟ مرجع: متنازمن - ۱۴۰۳
- الف) LiS_2 : لیتیم سولفید ب) S_2Cl_2 : دی گوگرد دی کلرید
 پ) Cr_2O_3 : کروم (II) اکسید ت) N_2O_3 : نیتروژن اکسید
 ث) $AgCl$: نقره کلرید ج) Mg_2N_3 : منیزیم نیتريد
 چ) FeO : آهن اکسید ح) $ZnCl_2$: روی (II) کلرید
- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ ۵



- ① گونه‌های ${}_{31}Ga^{3+}$ ؛ ${}_{30}Zn^{2+}$ و ${}_{28}Ni$ همگی دارای ۲۸ الکترون بوده و آرایش الکترونی یکسانی دارند.
- ② شمار الکترون‌ها در سومین لایه اتم عنصرهای ${}_{24}Cr$ و ${}_{25}Mn$ با یکدیگر متفاوت است.
- ③ آرایش الکترونی فشرده کاتیون ${}_{26}Fe^{3+}$ به صورت $[{}_{18}Ar]3d^5$ می‌باشد.
- ④ اتم ۳ عنصر واسطه در دوره چهارم جدول دوره‌ای، در زیرلایه $4s$ خود دارای ۱ الکترون‌اند.

- ① دسته‌ای از عنصرهای جدول دوره‌ای هستند که زیر لایه d اتم آنها در حال پرشدن است.
- ② در دوره‌های چهارم تا هفتم جدول تناوبی جای دارند.
- ③ تمامی فلزهای واسطه با تشکیل کاتیون به آرایش الکترونی گاز نجیب پیش از خود دست می‌یابند.
- ④ نخستین فلز واسطه جدول دوره‌ای، در وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.

- ① عناصر جدول دوره‌ای را براساس شماره گروه آن‌ها می‌توان در سه دسته فلز، شبه فلز و نافلز جای داد.
- ② عنصرها در جدول دوره‌ای براساس بنیادی‌ترین ویژگی آن‌ها؛ یعنی عدد جرمی چیده شده‌اند.
- ③ عناصری که شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه اتم آن‌ها باهم برابر است، در یک گروه از جدول دوره‌ای جای می‌گیرند.
- ④ آرایش الکترونی فشرده کاتیون ${}_{29}M^{2+}$ به صورت $[Ar]3d^9$ است.

۱۰- پاسخ درست هر سه پرسش زیر در کدام گزینه آمده است؟ (اتم‌های مورد نیاز: ${}_{11}Na - {}_3Li - {}_{19}K - {}_{20}Ca$ -

${}_{31}Ga - {}_{26}Fe - {}_{30}Zn$)

- الف) آرایش الکترونی آخرین زیر لایه یون Ga^{3+} مشابه کدام یون است؟
- ب) کدام یون به آرایش هشت تایی پایدار رسیده است؟
- پ) تعداد الکترون‌های زیرلایه d در یون پایدار نخستین فلز واسطه با کاتیون کدام ترکیب برابر است؟



۱۱- کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف) تعداد الکترون‌های ${}_{30}Zn^{2+}$ و ${}_{28}Ni$ با هم برابر است؛ بنابراین تعداد زیرلایه های اشغال شده از الکترون در آن‌ها نیز برابر است.

ب) ${}_{28}Ni$ با از دست دادن الکترو نهایی بیرونی‌ترین زیرلایه خود به آرایش الکترونی پایدار گاز نجیب قبل از خود نمی‌رسد.

پ) آرایش الکترونی یون‌های فلزات واسطه مانند ${}_{28}Ni^{2+}$ ، ${}_{30}Zn^{2+}$ و ${}_{21}Sc^{3+}$ مشابه آرایش الکترونی هیچ گاز نجیبی نمی‌باشد.

ت) کاتیون حاصل از فلزهای اصلی، اغلب برخلاف فلزهای واسطه، به آرایش پایدار گاز نجیب قبل از خود می‌رسند.

- ① الف، ب، ت ② ب، پ، ت ③ الف، پ ④ ب، ت



۱۲- مجموع تعداد الکترون‌های آخرین زیرلایه در کاتیون‌های کدام گزینه از سایرین کمتر است؟ (از هر ترکیب فقط یک کاتیون را در نظر بگیرید.)
مرجع: smart- ۱۳۹۷

- ① $_{29}CuNO_3 - _{26}Fe_2O_3$ ② $_{13}Al_2O_3 - _{24}CrS$
③ $_{21}Sc_2S_3 - _{11}Na_2O$ ④ $_{25}MnCO_3 - _{27}CoCl_2$

۱۳- اگر فرض کنیم وجود زیرلایه d در یون‌های واسطه باعث رنگی شدن محلول آبی آن‌ها باشد، محلول کدام نمک در آب، نمی‌تواند رنگی باشد؟ ($_{21}Sc$, $_{29}Cu$, $_{26}Fe$)
مرجع: منتا- ۱۳۹۷

- ① $CuCl_2$ ② $CuCl$ ③ $FeCl_3$ ④ $ScCl_3$

۱۴- اتم عنصرهای گروه ۱ و ۲ در شرایط مناسب با الکترون به تبدیل می‌شوند که آرایشی همانند آرایش الکترونی گاز نجیب از خود را دارند.
مرجع: منتا- ۱۳۹۶

- ① گرفتن - کاتیون - بعد ② از دست دادن - کاتیون - پیش
③ گرفتن - آنیون - بعد ④ از دست دادن - آنیون - پیش

۱۵- شمار الکترون‌های دارای $n = 3$ در اتم عنصر A ، ۲۱، چند برابر شمار الکترون‌های ظرفیت در اتم عنصر X ۳۱ است؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

- ① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۱۶- اتم کدام دو عنصر، به ترتیب با گرفتن دو، و از دست دادن یک الکترون، به آرایش دو گاز نجیب متفاوت می‌رسند؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

- ① $_{11}M, _{21}Z$ ② $_{37}Y, _{34}X$ ③ $_{3}G, _{16}A$ ④ $_{1}D, _{8}E$

۱۷- عنصر با گرفتن یا از دست دادن الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسد.
مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

- ① $Y, _{34}2$ ② $D, _{31}3$ ③ $M, _{21}3$ ④ $Z, _{32}4$

۱۸- اگر زیرلایه‌های الکترونی در حال پر شدن در اتم‌های دو عنصر X و Y ، به ترتیب d^3 (با a الکترون) و p^4 (با b الکترون) و تفاوت a و b برابر ۷ باشد، کمترین تفاوت عدد اتمی دو عنصر X و Y ، کدام است؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

- ① ۶ ② ۵ ③ ۴ ④ ۳

۱۹- اگر مجموع شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در اتم دو عنصر در دوره دوم جدول تناوبی عنصرها، برابر ۹ باشد، کدام مورد، نادرست است؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

- ① تفاوت شمار الکترون‌های ظرفیت اتم دو عنصر، می‌تواند برابر یک باشد.
② آخرین زیرلایه اتم یکی از عنصرها می‌تواند پر و دیگری، نیمه‌پر باشد.
③ عدد اتمی یک عنصر می‌تواند ۷/۰ عدد اتمی عنصر دیگر باشد.
④ تفاوت عدد اتمی دو عنصر، عددی زوج است.

۲۰- در کدام یون نسبت تعداد الکترون‌های زیر لایه d به بار یون برابر «۱۰» می‌باشد؟
مرجع: متنازومون- ۱۴۰۳

- ① $_{29}Cu^+$ ② $_{26}Fe^{2+}$ ③ $_{24}Cr^{3+}$ ④ $_{30}Zn^{2+}$



۲۱- با توجه به آرایش الکترونی اتم عنصرهای داده شده، کدام مورد درست است؟

$X : [Kr]4d^5 5s^1$, $Y : [Xe]6s^2$ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

- ① عدد اتمی عنصر X بزرگتر از عدد اتمی عنصر Y است و آرایش الکترونی اتم X ، از قاعده آفا پیروی نمی کند.
- ② X و Y هر دو فلزند و شمار الکترونهای ظرفیت اتم Y ، دو برابر شمار الکترونهای ظرفیت اتم X است.
- ③ X و Y می توانند در واکنش با یکدیگر ترکیب یونی تشکیل دهند اما زیروند کاتیون در فرمول شیمیایی آن، متغیر است.
- ④ شمار الکترونها در زیرلایه $4d$ در اتم Y ، دو برابر شمار این الکترونها در اتم X است و اتمها، الکترون با $l = 3$ ندارند.

۲۲- در آرایش الکترونی فشرده اتم کدام دو عنصر، نماد شیمیایی گاز نجیب، مشابه است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

- ① 3G , 1E ② ${}^{13}M$, ${}^{29}J$ ③ ${}^{33}D$, ${}^{20}A$ ④ ${}^{12}Z$, ${}^{25}X$

۲۳- بیرونی ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم عنصر A ، $4p^1$ است. کدام مورد به یقین درست است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

- ① آرایش الکترونی یون پایدار A ، مشابه آرایش الکترونی یون پایدار تنها یکی از عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول تناوبی است.
- ② شمار الکترونهای اتم A ، نصف مجموع شمار الکترونهای اتم عنصرهای قبلی و بعدی A در گروه آن در جدول تناوبی است.
- ③ اگر شمار الکترونهای ظرفیت اتم عنصر X ، با شمار الکترونهای ظرفیت اتم عنصر A ، برابر باشد، A و X در جدول تناوبی هم گروه اند.
- ④ اتم A ، دارای ۳ الکترون ظرفیت است که هنگام شرکت در تشکیل ترکیبهای یونی و مولکولی، آنها را از دست می دهد یا به اشتراک می گذارد.

۲۴- آرایش الکترونی کاتیون در کدام دو ترکیب زیر با یکدیگر یکسان است؟ مرجع: smart- ۱۴۰۰

- ① $V_2O_3 - CaO$ ② $Cu_2S - NiS$ ③ $CuO - Fe_2O_3$ ④ $ZnO - Ga_2O_3$

۲۵- شمار الکترونهای با $n + l = 5$ در عنصر X که در جدول دوره های زیر عنصر ${}^{16}S$ قرار دارد، چند برابر شمار الکترونهای لایه ظرفیت عنصر ${}^{56}Fe$ است؟ مرجع: متنازمن- ۱۴۰۲

- ① $1/5$ ② $1/75$ ③ 2 ④ $2/25$

۲۶- در کدام دو گونه داده شده، تعداد الکترونها در زیرلایه با $(n = 3, l = 2)$ با هم برابر نیست؟ مرجع: smart- ۱۴۰۰

- ① ${}^{21}Sc - {}^{33}Ti$ ② ${}^{25}Mn^{2+} - {}^{24}Cr^{+}$ ③ ${}^{29}Cu^{2+} - {}^{28}Ni^{+}$ ④ ${}^{22}Ti - {}^{23}V^{3+}$

۲۷- آرایش الکترونی $[{}^{18}Ar]3d^4 4s^2$ مربوط به یک است و در لایه ظرفیت آن الکترون وجود دارد و در آرایش الکترونی آن تعداد الکترون در $l = 2$ آن وجود دارد. مرجع: متنا- ۱۴۰۰

- ① کاتیون واسطه - ۲ - ۸ ② عنصر واسطه - ۲ - ۱۲ ③ عنصر واسطه - ۱۰ - ۸ ④ کاتیون واسطه - ۱۰ - ۸

۲۸- شمار الکترونهای زیرلایه d کاتیون در ترکیب $Cr_2(SO_4)_3$ با شمار الکترونهای زیرلایه d کدام عنصر برابر است؟ مرجع: متنا- ۱۳۹۹

- ① ${}^{23}V$ ② ${}^{22}Ti$ ③ ${}^{21}Sc$ ④ ${}^{25}Mn$



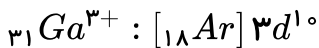
پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳ الف) در آرایش الکترونی عنصرهای گروه ۱ و ۶ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ از دوره چهارم زیرلایه نیمه پر وجود دارد.

ب) در آرایش الکترونی عنصرهای گروه ۱ و ۶ و ۱۱ و ۱۳ در بیرونی ترین زیرلایه یک الکترون وجود دارد.

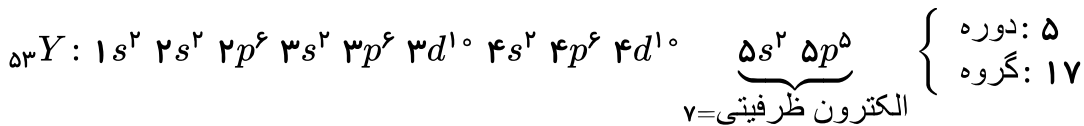
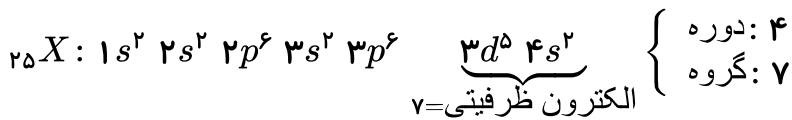
پ) در آرایش الکترونی ۸ عنصر لایه الکترونی سوم پر است.

ت) عنصر گروه ۱۳ از دوره چهارم که فلز اصلی است و در صورت از دست دادن الکترون های ظرفیتی (۳ الکترون) به آرایش هشتایی نمی رسد.



ث) درست است.

۲- گزینه ۳ آرایش الکترونی ${}_{25}\text{X}$ و ${}_{53}\text{Y}$ را می نویسیم:



در ${}_{25}\text{X}$ ، ۷ زیرلایه و در ${}_{53}\text{Y}$ ، ۱۱ زیرلایه اشغال شده است.

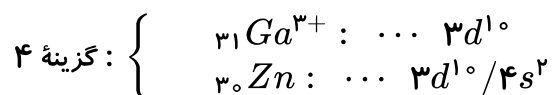
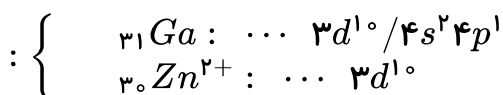
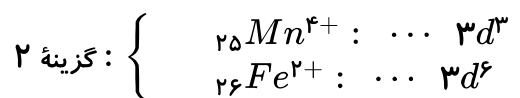
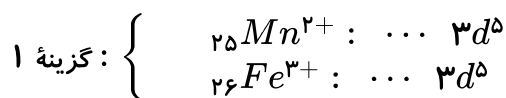
۳- گزینه ۳ در میان عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول تناوبی، دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ به ترتیب با آرایش الکترونی $[{}_{18}\text{Ar}] 3d^5 4s^1$ و $[{}_{18}\text{Ar}] 3d^10 4s^1$ ، در آخرین زیرلایه خود (۴s)، یک الکترون دارند و نیمه پر هستند.

باتوجه به آرایش الکترونی ${}_{24}\text{X}^{3+}$ ، لایه سوم این کاتیون شامل زیرلایه های $3d^3$ ، $3p^6$ و $3s^2$ است که در مجموع شامل ۱۱ الکترون می باشد.

۴- گزینه ۲ چهارمین عنصر دسته d عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ با آرایش الکترونی $1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^5 / 4s^1$ است که در آن ۱۲ الکترون دارای $l=0$ و ۷ الکترون دارای $l=1$ است.

پس نسبت مورد نظر $\frac{12}{7}$ است.

۵- گزینه ۲





گزینه ۳

۶- گزینه ۲ بررسی موارد:

- الف) نادرست است $\leftarrow Li_2S$ لیتیم سولفید
 ب) درست است.
 ث) درست است.
 ج) نادرست است $\leftarrow آهن (II)$ اکسید
 پ) نادرست است $\leftarrow کروم (III)$ اکسید
 ت) نادرست است $\leftarrow دی نیتروژن تری اکسید$
 ج) نادرست است $\leftarrow Mg_3N_2$
 ح) نادرست است $\leftarrow روی کلرید$

۷- گزینه ۳

$$\begin{cases} {}_{26}Fe : [18Ar]3d^6 4s^2 \\ {}_{26}Fe^{3+} : [18Ar]3d^5 \end{cases}$$

بررسی عبارت‌های نادرست:

(۱) آرایش الکترونی ${}_{28}Ni$ با ${}_{31}Ga^{3+}$ و ${}_{30}Zn^{2+}$ متفاوت است.

$${}_{31}Ga^{3+} : [18Ar]3d^1 \quad , \quad {}_{30}Zn^{2+} : [18Ar]3d^1 \quad , \quad {}_{28}Ni : [18Ar]3d^8 4s^2$$

(۲) در سومین لایه اتم هر کدام، ۱۳ الکترون وجود دارد.

$$\begin{cases} {}_{24}Cr : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1 \\ {}_{25}Mn : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2 \end{cases}$$

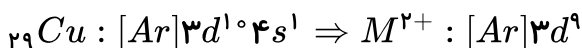
$13e^-$

(۴) تنها، اتم عنصرهای واسطه ${}_{24}Cr$ و ${}_{29}Cu$ در زیرلایه $4s$ خود دارای ۱ الکترون می‌باشند.

نکته: در دوره چهارم جدول دوره‌ای علاوه بر ${}_{24}Cr$ و ${}_{29}Cu$ ، اتم پتاسیم (${}_{19}K$) نیز در زیرلایه $4s$ خود، دارای ۱ الکترون هستند.

۸- گزینه ۳ اتم اغلب فلزهای واسطه با تشکیل کاتیون به آرایش الکترونی گاز نجیب پیش از خود دست نمی‌یابند.

۹- گزینه ۴



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: این دسته‌بندی براساس رفتار آن‌ها صورت می‌گیرد.

گزینه «۲»: عنصرها در جدول دوره‌ای براساس بنیادی‌ترین ویژگی آن‌ها؛ یعنی عدد اتمی (Z) چیده شده‌اند.

گزینه «۳»: زیرا مثلاً در بیرونی‌ترین زیرلایه هر کدام از اتم‌های C و Mg ، دو الکترون وجود دارد، اما در یک گروه جای ندارند.

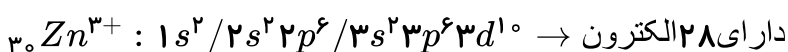
۱۰- گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

الف) آرایش الکترونی آخرین زیر لایه یون Ga^{3+} مشابه یون‌های Zn^{2+} و Ca^{+} است. (رد گزینه ۲)

ب) یون‌های Na^{+} و Ca^{2+} به آرایش هشت تایی پایدار رسیده‌اند. (رد گزینه‌های ۱ و ۳)

پ) تعداد الکترون‌های زیر لایه d در یون پایدار نخستین فلز واسطه (Sc^{3+}) با کاتیون‌های k^{+} و Ca^{2+} برابر است. (رد گزینه ۲)

۱۱- گزینه ۴ با توجه به موارد زیر، یعنی:





دارای ۲۸ الکترون $\rightarrow \rightarrow 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^8 / 4s^2 \rightarrow Ni_{28}$

$Ni^{2+}_{28} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^8$

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند و موارد (الف) و (پ) نادرست. زیرا؛

اگرچه تعداد الکترون‌های یون‌ها روی و اتم نیکل برابر ۲۸ است ولی این دو آرایش الکترونی متفاوتی دارند و با توجه به آرایش‌های الکترونی فوق یون نیکل به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد.

از میان فلزات واسطه فقط Sc_{21} با یون Sc^{3+}_{21} به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

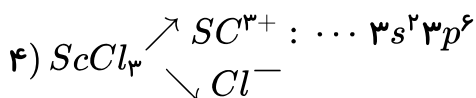
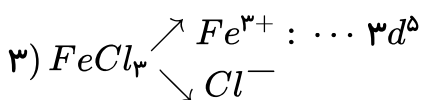
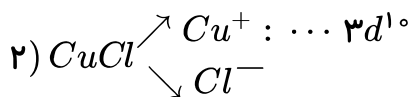
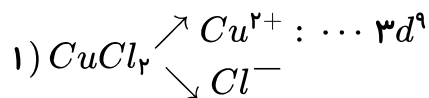
از میان فلزات گروه‌های اصلی جدول تناوبی اکثراً با کاتیون خود به آرایش هشتایی می‌رسند ولی یون‌های Sn^{2+} و Pb^{2+} چنین وضعیتی ندارند.

۱۲- گزینه ۲

گزینه ۱: $\left\{ \begin{matrix} Fe^{3+} : [Ar] 3d^5 \\ Cu^+ : [Ar] 3d^{10} \end{matrix} \right\} \rightarrow 5 + 10 = 15$ گزینه ۳: $\left\{ \begin{matrix} Na^+ : [He] 2s^2 2p^6 \\ Sc^{3+} : [Ne] 3s^2 3p^6 \end{matrix} \right\} \rightarrow 6 + 6 = 12$

گزینه ۲: $\left\{ \begin{matrix} Cr^{2+} : [Ar] 3d^4 \\ Al^{3+} : [He] 2s^2 2p^6 \end{matrix} \right\} \rightarrow 4 + 6 = 10$ گزینه ۴: $\left\{ \begin{matrix} Co^{2+} : [Ar] 3d^7 \\ Mn^{2+} : [Ar] 3d^5 \end{matrix} \right\} \rightarrow 5 + 7 = 12$

۱۳- گزینه ۴



Sc^{3+}_{21} به آرایش $3s^2 3p^6$ می‌رسد نه آرایش زیر لایه d

۱۴- گزینه ۲ فلزهای گروه‌های ۱ و ۲ با از دست دادن الکترون و تشکیل یون مثبت (کاتیون) به آرایش گاز نجیب پیش از خود (ماقبل خود) می‌رسند.

۱۵- گزینه ۲

$_{21}A : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^1 / 4s^2$
 $_{31}X : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^{10} / 4s^2 4p^1$

$n = 3$: تعداد الکترون با $9 = 2 + 6 + 1$ $\Rightarrow 9 \div 3 = 3$
 الکترون‌های ظرفیت $3 = 2 + 1$



۱۶- گزینه ۱ اتمی که با گرفتن دو الکترون به آرایش گاز نجیب می‌رسد، عدد اتمی‌اش دو عدد از عدد اتمی گاز نجیب کمتر است. در نتیجه با توجه به اینکه عدد اتمی گازهای نجیب به ترتیب زیر است:

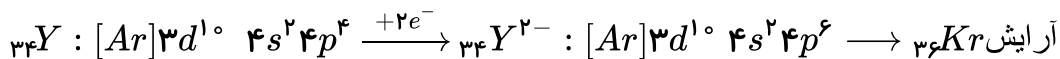
۲, ۱۰, ۱۸, ۳۶, ۵۴, ۸۶

عدد اتمی اتم اول باید یکی از اعداد ۸, ۱۶, ۳۴, ۵۲ و ۸۴ باشد.

برای اتم دوم نیز چون با از دست دادن یک الکترون به آرایش گاز نجیب می‌رسد، در نتیجه عدد اتمی آن یک عدد از عدد اتمی گاز نجیب بیشتر و یکی از اعداد ۳, ۱۱, ۱۹, ۳۷, ۵۵ و ۸۷ است.

به دلیل اینکه صورت سوال آرایش گاز نجیب متفاوت را مدنظر دارد، گزینه ۳ که مبنای اتم‌ها دو گاز نجیب Ar ۱۸ برای اتم اول و He ۲ برای اتم دوم است، صحیح است.

۱۷- گزینه ۱ عدد اتمی عناصر موجود در گزینه‌ها ۲۱, ۳۱, ۳۲, ۳۴ می‌باشد که بین دو گاز نجیب Ar ۱۸ و Kr ۳۶ قرار می‌گیرند. این عناصر از دوره چهارم جدول بوده و گاز نجیب هم‌دوره آنها Kr ۳۶ می‌باشد. در نتیجه برای رسیدن به آرایش الکترونی این گاز نجیب، باید عنصر موردنظر الکترون «دریافت» کند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: عنصر ۳۱ با دریافت ۳ الکترون به آرایش Kr ۳۶ نمی‌رسد (در واقع این عنصر کاتیون $3+$ تشکیل می‌دهد و به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد).

گزینه ۳: این عنصر نیز توانایی تشکیل کاتیون $3+$ را داشته و به آرایش گاز نجیب «دوره قبل» می‌رسد.

گزینه ۴: معمولاً عناصر توانایی گرفتن یا از دست دادن ۴ الکترون را ندارند و به جای آن، الکترون‌های خود را به اشتراک می‌گذارند.

۱۸- گزینه ۴

$$X : 3d^a$$

$$Y : 4p^b$$

$$a - b = 7$$

$$a = 10, b = 3 \Rightarrow X \rightarrow {}_{29}Cu \text{ یا } {}_{30}Zn, Y \rightarrow {}_{33}As \rightarrow 33 - 29 = 4 \text{ یا } 33 - 30 = 3$$

$$a = 8, b = 1 \Rightarrow X \rightarrow {}_{28}Ni, Y \rightarrow {}_{31}Ga \rightarrow 31 - 28 = 3$$

(نکته: $3d^9$ ناپایدار است و وجود ندارد).

۱۹- گزینه ۴ یا عناصر با زیرلایه‌های $(2p^3/2p^6)$ یا $(2p^4/2p^5)$ می‌تواند باشد چون در دوره دوم فقط زیرلایه p می‌تواند این تعداد e^- را بگیرد و زیرلایه d هم وجود ندارد.

۲۰- گزینه ۱



$$F_1 = ۷۶, F_۲ = ۲۴ \quad A = n + p$$

$$M_1 = ۳۵, M_۲ = ۳۷ \quad A_۲ = ۳۷ = n + ۱۷ \Rightarrow \boxed{n = ۲۰}$$

$$۲۹Cu : [18Ar] 4s^1 3d^1 \Rightarrow CU^+ : [18Ar] 3d^1 \Rightarrow \frac{1^0}{1} = 1^0$$

$$۲۶Fe : [18Ar] 4s^2 3d^6 \Rightarrow Fe^{2+} : [18Ar] 3d^6 \Rightarrow \frac{6}{۲} = ۳$$

$$۲۴Cr : [18Ar] 4s^1 3d^5 \Rightarrow Cr^{3+} : [18Ar] 3d^3 \Rightarrow \frac{۳}{۳} = ۱$$

$$۳۰Zn : [18Ar] 4s^2 3d^10 \Rightarrow Zn^{2+} : [18Ar] 3d^10 \Rightarrow \frac{1^0}{۲} = ۵$$

۲۱- گزینه ۴ با توجه به اینکه $۵۶Y : [54Xe] 6s^2 4d^5$ و $۴۲X : [36Kr] 4d^5 5s^1$ است، شمار الکترون‌ها در زیرلایه $4d$ در اتم Y .

۱۰- تاست که دو برابر شمار الکترون در زیرلایه $4d$ اتم X است. با توجه به اینکه اتم‌های X و Y زیرلایه f ندارند، پس الکترون‌هایی با $l = ۳$ در آن وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) عدد اتمی عنصر X ، کوچک‌تر از عدد اتمی عنصر Y است و آرایش الکترونی اتم X ، از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

گزینه ۲) شمار الکترون‌های ظرفیت اتم Y ، ۲ و شمار الکترون‌های ظرفیت اتم X ، ۶ تاست.

گزینه ۳) عناصر X و Y نمی‌توانند با یکدیگر تشکیل ترکیب یونی بدهند زیرا هر دو فلزند.

۲۲- گزینه ۳

$$۳۳D : [18Ar] 3d^1 4s^2 4p^3 \quad ۲۰A : [18Ar] 4s^2$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱)

$$۳G : [2He] 2s^1 \quad 1E : 1s^1$$

گزینه ۲)

$$13M : [10Ne] 3s^2 3p^1 \quad ۲۹J : [18Ar] 3d^1 4s^1$$

گزینه ۴)

$$12Z : [10Ne] 3s^2 \quad ۲۵X : [18Ar] 3d^5 4s^2$$

۲۳- گزینه ۲ عنصر گالیم است که آرایش الکترونی آن به $4p^1$ ختم می‌شود. عدد اتمی عنصر گالیم برابر با ۳۱ بوده و در اتم خود ۳۱ الکترون دارد. این عنصر در گروه سیزدهم جدول و میان عناصر آلومینیم و ایندیم واقع شده است. عنصر آلومینیم در هر اتم خود ۱۳ الکترون و عنصر ایندیم ۴۹ الکترون دارد که مجموعاً دو برابر تعداد الکترون‌های عنصر گالیم است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

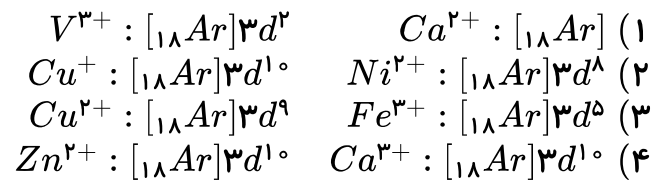
گزینه ۱) آرایش الکترونی Ga^{3+} همانند Zn^{2+} و Cu^+ به $3d^10$ ختم می‌شود.

گزینه ۳) الزاماً دو عنصر با شمار الکترون‌های ظرفیتی برابر در یک گروه قرار ندارند. به عنوان مثال، گالیم همانند وانادیم ۳ الکترون ظرفیتی

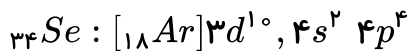
دارد.

گزینه ۴) گالیم یک فلز است و در تشکیل ترکیبات مولکولی شرکت نمی‌کند.

۲۴- گزینه ۴ آرایش الکترونی کاتیون‌های ترکیبات هر گزینه به صورت زیر است:

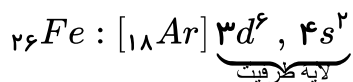
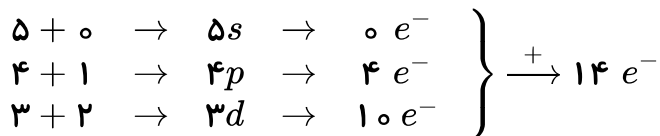


۲۵- گزینه ۲ X عنصر Se ۳۴ است.



$$n + L = 5$$

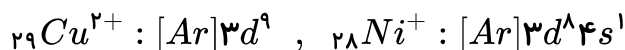
حالت‌های مختلف را به صورت زیر بررسی می‌کنیم:



$$\text{نسبت مورد نظر} = \frac{14}{8} = 1,75$$

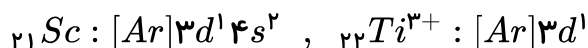
۲۶- گزینه ۳

زیرلایه با $l = 2$ و $n = 3$ همان $3d$ است.

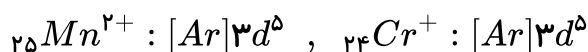


بررسی سایر گزینه‌ها:

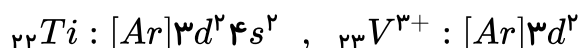
(۱)



(۲)



(۴)



۲۷- گزینه ۳

$$I = 2 \Rightarrow d^{\text{لایه}} \Rightarrow 3d^8 \Rightarrow 8e$$

این آرایش نمی‌تواند مربوط به یک کاتیون باشد، زیرا در عنصرهای واسطه زمانی کاتیون تشکیل می‌شود که ابتدا زیر لایه $4s$ الکترون از دست

بدهد ولی آرایش الکترونی داده شده، زیر لایه $4s$ را دارد.

۲۸- گزینه ۱ کاتیون در ترکیب $Cr_2(SO_4)_3$ یون Cr^{3+} می‌باشد و آرایش الکترونی آن به صورت زیر است:

نمونه سوالات هندسه دوازدهم

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، درایه واقع بر سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC کدام است؟

- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ ۰

۲- اگر $\begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}$ مقدار مثبت x کدام است؟

- ① ۴ ② ۳ ③ ۱ ④ ۲

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

- ① ۱۰۴ ② ۲۰۳ ③ ۳۰۲ ④ ۴۰۱

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و x درایه سطر اول و ستون دوم AB بوده و y درایه سطر دوم و ستون اول BA باشد، آنگاه

$x + y$ برابر است با:

- ① ۲ ② -۲ ③ ۱ ④ -۱

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{1395} - A^{1396}$ کدام است؟

- ① I ② A ③ $I - A$ ④ $A - I$

۶- اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i + j - 1 & i > j \\ 2i & i = j \\ j - 3 & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

- ① ۸ ② ۱۲ ③ ۱۶ ④ ۲۰

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ کدام است؟

- ① ۱۰ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۵

۸- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ و $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $BA + AB$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۹- اگر $A^2 = 2A - I$ آنگاه وارون ماتریس $A + 3I$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{16}(\delta I - A)$ ② $\frac{1}{16}(A - \delta I)$ ③ $\frac{1}{16}(A + \delta I)$ ④ $\frac{1}{16}(\delta A - I)$

۱۰- اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد به طوری که $6A^2 - 5A - 9I = \bar{O}$ ، آنگاه وارون ماتریس $3A + 2I$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}(2A - 3I)$ ② $\frac{1}{3}(3A + 2I)$ ③ $\frac{1}{3}(3A - 3I)$ ④ $-\frac{1}{3}(2A - 3I)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ برای یافتن درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$m_{21} = (A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = 3$$

۲ - گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} = 6x^2 + 1 = 7 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

۳ - گزینه ۲ توجه کنید که ماتریس A یک ماتریس بالامثلثی است. داریم:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A^{100} &= A^{99} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{100} = \text{مجموع درایه‌های } B = 203$$

۴ - گزینه ۱ می‌دانیم برای یافتن درایهٔ سطر i ام و ستون j ام ماتریس AB باید درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظیر به نظیر در درایه‌های ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم. پس:

$$AB \text{ دوم ستون} = x = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 3 + 8 = 7$$

$$BA \text{ اول ستون} = y = \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -6 + 1 = -5 \Rightarrow x + y = 7 - 5 = 2$$

۵ - گزینه ۳

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

یعنی ماتریس‌های شبه قطری در توان‌های زوج به قطری تبدیل می‌شوند.

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} I & n = 2k \\ A & n = 2k - 1 \end{cases}$$

$$A^{1396} - A^{1395} = I - A$$

۶ - گزینه ۴ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2-3 & 3-3 \\ 2+1-1 & 4 & 3-3 \\ 3+1-1 & 3+2-1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های } A = 20$$

۷ - گزینه ۲ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

دقت کنید وقتی $A^2 = A$ شده است پس A به هر توانی هم که برسد همان A می‌شود، یعنی:

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = 5 + 10 = 15$$

۸ - گزینه ۱

از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم (البته برای ماتریس):

$$(A - B)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)^r = (A - B)(A - B) = A^r - AB - BA + B^r = A^r + B^r - (AB + BA) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - (AB + BA)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - (AB + BA) \rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

۹ - گزینه ۱

$$A^r = 2A - I \Rightarrow A^r - 2A = -I \Rightarrow A^r - 2A - 15I = -16I$$

$$\Rightarrow (A + 3I)(A - 5I) = -16I$$

$$\Rightarrow (A + 3I)\left(\frac{A - 5I}{-16}\right) = I$$

$$\Rightarrow (A + 3I)^{-1} = \frac{1}{16}(5I - A)$$

۱۰ - گزینه ۱ از رابطه ماتریسی فرض سؤال، ضربی از ماتریس $3A + 2I$ جدا می‌کنیم:

$$6A^r - 5A - 9I = \bar{O} \Rightarrow (3A + 2I)(2A - 3I) - 3I = \bar{O} \Rightarrow (3A + 2I)(2A - 3I) = 3I \Rightarrow (3A + 2I) \times \frac{1}{3}(2A - 3I) = I \Rightarrow (3A + 2I)^{-1} = \frac{1}{3}(2A - 3I)$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۳ - ۲

۵ - ۳

۷ - ۲

۹ - ۱

۲ - ۳

۴ - ۱

۶ - ۴

۸ - ۱

۱۰ - ۱

نمونه سوالات گسسته دوازدهم

اصل جمع و ضرب

۱) ۶ پله و ۴ قوطی رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توانیم این پله‌ها را رنگ کنیم به طوری که رنگ هیچ دو پله‌ای که کنار هم هستند، یکسان نباشد؟

۳۳۷۶ (۴)

۳۳۶۷ (۳)

۹۷۲ (۲)

۷۲۹ (۱)

۲) در یک مسابقهٔ تلویزیونی ۴ نفر برنده شده‌اند و هر کدام مجاز هستند که به عنوان جایزه، مسافرت به حداقل یکی از شهرهای اصفهان یا شیراز را انتخاب کنند. برای انتخاب جایزه‌ها چند حالت مختلف امکان‌پذیر است؟

۸۱ (۴)

۱۶ (۳)

۶۴ (۲)

۱۰۰ (۱)

۳) چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت که همهٔ رقم‌های آن مضرب ۳ باشند؟

۱۳۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۸۱ (۲)

۱۹۲ (۱)

۴) چند عدد سه رقمی بزرگتر یا مساوی ۵۸۰ وجود دارد که فاقد رقم تکراری باشد؟

۳۳۶ (۴)

۳۲۸ (۳)

۳۰۴ (۲)

۲۸۸ (۱)

۵) چند عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ می‌توان ساخت که همهٔ رقم‌های آن زوج باشد؟

۱۳۶ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۱۶ (۲)

۱۲۵ (۱)

۶) تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام غیر تکراری کدام است؟

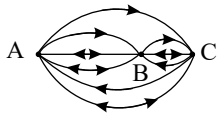
۹۷۲ (۴)

۹۶۸ (۳)

۹۵۲ (۲)

۹۴۸ (۱)

۷) با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از A به C رفت و برگشت؟ (جهت حرکت در هر جاده، با فلش مشخص شده است).



۴۲ (۲)

۴۸ (۱)

۴۰ (۴)

۵۶ (۳)

۸) چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت به طوری که رقم ۲ در آنها به صورت یک در میان مشاهده شود؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

۱۵۳ (۴)

9×10^3 (۳)

۱۹۰ (۲)

۴! (۱)

جایگشت

۹) ساده شدهٔ عبارت $\frac{11 \times (12! + 11!)}{12! - 11!}$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۱۲ (۲)

۱۳ (۱)

۱۰ مقدار n در عبارت $\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2}$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱ با حروف کد AAAAbcde چند کد ۸ حرفی می‌توان نوشت که حروف کوچک و بزرگ یک در میان باشند؟

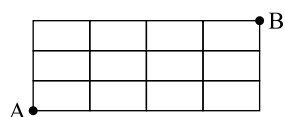
- ۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۲ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SAMPLE، به طوری که A و P کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۲۴۰

۱۳ تعداد جایگشت‌های کلمه SYSTEM که در آن‌ها بین دو حرف S دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد، کدام است؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۹۲



۱۴ در شکل روبه‌رو اگر قرار باشد که کوتاه‌ترین مسیر را طی کنیم، به چند طریق می‌توانیم از A به B برسیم؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

۱۵ حروف کلمه ATALANTA، چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت، به طوری که هر حرف A یک‌درمیان باشند؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۱۶ با ارقام عدد ۵۴۳۵۳۵۵۳، چند عدد هشت رقمی زوج می‌توان نوشت؟

- ۱) ۳۵ ۲) ۵۶ ۳) ۷۲ ۴) ۸۴

۱۷ با استفاده از ارقام ۱، ۵، ۳، ۰، ۰، ۰، ۳، چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت؟

- ۱) ۲۸۸۰ ۲) ۷۶۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۲۴۰

ترکیب

۱۸ با حروف کلمه poetry چند کلمه ۴ حرفی بدون تکرار می‌توان ساخت که در آن‌ها از میان حروف p و y حداکثر یکی به کار رفته باشد؟

- ۱) ۱۲۶ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۶

۱۹ ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به گونه‌ای که هیچ دو دانش‌آموزی از پایه دوازدهم کنار هم نباشند؟

- ۱) $6! \times 7!$ ۲) $5! \times 6!$ ۳) $5! \times 7!$ ۴) $4! \times 6!$

۲۰ مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل f و فاقد b دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

پاسخنامه تشریحی

۱ پله اول را به ۴ طریق می‌توانیم رنگ کنیم. پله بعدی نباید هم‌رنگ این پله باشد. پس به $4 - 1 = 3$ حالت می‌توانیم این پله را رنگ کنیم. پله سوم هم نباید هم‌رنگ پله دوم باشد. مثلاً اگر پله دوم نارنجی است، پله سوم نباید نارنجی باشد. پس از بین ۴ رنگی که داریم، ۳ حالت برای رنگ کردن پله سوم داریم و همین‌طور تا پله ششم؛ یعنی برای پله اول ۴ انتخاب و برای هر کدام از پله‌های دو تا ششم، ۳ انتخاب داریم. طبق اصل ضرب رنگ کردن پله‌ها به $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 972$ طریق قابل انجام است.

۲ هر کدام از شرکت‌کننده‌ها می‌توانند به «اصفهان»، یا «شیراز»، یا «اصفهان و شیراز» سفر کنند. پس هر کدام ۳ انتخاب دارند، در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

۳ برای یکان و دهگان و صدگان هر کدام ۴ انتخاب داریم (۰ یا ۳ یا ۶ یا ۹).
تذکر: صفر مضرب همه اعداد طبیعی است.

برای هزارگان ۳ انتخاب داریم (۳ یا ۶ یا ۹).

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$192 \rightarrow 4 \times 4 \times 4 \times 3 \rightarrow \begin{matrix} 4 \text{ حالت} & 4 \text{ حالت} & 4 \text{ حالت} & 3 \text{ حالت} \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} \end{matrix}$$

۴ رقم صدگان یا برابر ۵ است و یا بزرگتر از ۵. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$16 \rightarrow 2 \times 8 = 16 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} \rightarrow \text{رقم صدگان ۵ باشد}$$

$$288 \rightarrow 4 \times 9 \times 8 = 288 \rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{matrix} \rightarrow \text{رقم صدگان بزرگتر از ۵ باشد}$$

پس کل تعداد عددهای موردنظر $16 + 288 = 304$ است.

۵ در اعداد ۳ رقمی، صدگان نمی‌تواند صفر باشد پس تعداد حالات برابر است با:

$$100 \rightarrow 4 \times 5 \times 5 = 100$$

در اعداد ۲ رقمی دهگان نمی‌تواند صفر باشد، پس تعداد حالات برابر است با:

$$20 \rightarrow 4 \times 5 = 20$$

و تعداد اعداد طبیعی یک رقمی زوج هم ۴ است.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$124 \rightarrow 100 + 20 + 4 = 124$$

۶ برای آنکه عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵ باشد باید یکان آن صفر یا ۵ باشد؛ داریم:

$$448 \rightarrow 1 \times 7 \times 8 \times 8 = 448 \text{ (حالت ۱) رقم یکان ۵ باشد}$$

$$504 \rightarrow 1 \times 7 \times 8 \times 9 = 504 \text{ (حالت ۲) رقم یکان صفر باشد}$$

بنابر اصل جمع داریم:

$$952 \rightarrow 504 + 448 = 952 = \text{تعداد حالات مطلوب}$$

۷ به جهت فلش‌ها دقت کنید:

برای رفتن از A به C یا به‌طور مستقیم به C می‌رویم و یا ابتدا به B رفته و سپس از B به C می‌رویم:

$$A \xrightarrow{\text{مستقیم}} C : 2$$

$$A \rightarrow B : 3$$

$$B \rightarrow C : 2$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C : 3 \times 2 = 6$$

$$A \xrightarrow{\text{در کل}} C = 2 + 6 = 8$$

برای برگشت از C به A یا به‌طور مستقیم به A برمی‌گردیم و یا ابتدا به B برگشته و سپس از B به A برمی‌گردیم:

$$C \xrightarrow{\text{مستقیم}} A : 2$$

$$C \rightarrow B : 2$$

$$B \rightarrow A : 2$$

$$C \rightarrow B \rightarrow A : 2 \times 2 = 4$$

$$C \xrightarrow{\text{در کل}} A = 2 + 4 = 6$$

برای رفت و برگشت از A به C ، طبق اصل ضرب داریم:

$$48 \rightarrow 6 \times 8 = 48$$

۸ دو رقم ۲ می‌توانند در خانه‌های اول و سوم یا دوم و چهارم باشند.

حالت اول: ارقام دوم و چهارم غیر از ۲ هستند.

$$\frac{2}{1} \times \frac{9}{9} \times \frac{2}{1} \times \frac{9}{9} = 81$$

حالت دوم: رقم اول غیر از صفر و ۲ و رقم سوم غیر از ۲ است.

$$\frac{8}{8} \times \frac{2}{1} \times \frac{9}{9} \times \frac{2}{1} = 72$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد اعداد موردنظر برابر $81 + 72 = 153$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\frac{11 \times (12! + 11!)}{12! - 11!} = \frac{11 \times (12 \times 11! + 11!)}{12 \times 11! - 11!} = \frac{11 \times (13 \times 11!)}{11 \times 11!} = 13$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2} = \frac{n(n-1)! \times (n-3)!}{(n-2)(n-3)! \times (n-1)!} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n}{n-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3n - 6 = 2n$$

$$\Rightarrow 3n - 2n = 6 \Rightarrow n = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$AbAdAdAe \text{ یا } bAcAdAeA$$

$$4! + 4! = 24 + 24 = 48$$

۱۲ می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$

تعداد حالت‌هایی که P و A کنار هم باشند - تعداد کل حالت‌ها = تعداد حالت‌هایی که P و A کنار هم نباشند

P و A را یک حرف در نظر می‌گیریم و جایگشت ۵ حرف را در نظر می‌گیریم که برابر است با $5!$

خود P و A هم به ۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند بنابراین تعداد حالت‌هایی که P و A کنار هم باشند $5! \times 2$ است

$$6! - 5! \times 2 = 720 - 120 \times 2 = 720 - 240 = 480$$

۱۳ با توجه به این که کلمه‌ی حاصل ۶ حرفی است، ما باید ابتدا جایگاه دو حرف S را در این ۶ مکان مشخص کنیم. حالات مختلف قرارگیری حروف به صورت زیر

است:

$$\begin{array}{ll} ۱) \underline{S} \underline{S} & ۲) \underline{S} \underline{S} \\ ۳) \underline{S} \underline{S} & ۴) \underline{S} \underline{S} \end{array}$$

بنابراین حروف S به ۴ شکل می‌توانند در ۶ جایگاه قرار گیرند. هر کدام از ۴ جایگاه باقیمانده نیز به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ حالت می‌توانند پر شوند که طبق اصل ضرب معادل $4!$ است.

$$4 \times 4! = 4 \times 24 = 96$$

۱۴ کوتاه‌ترین مسیرها برای رسیدن از A به B ، مسیرهایی هستند که در آنها فقط حرکت رو به بالا و به سمت راست داریم؛ یعنی حرکت به سمت چپ و پایین نباید داشته باشیم. اگر هر حرکت به سمت بالا (Up) را با U و هر حرکت به سمت راست ($Right$) را با R نمایش دهیم، کوتاه‌ترین مسیرها درواقع شامل ۴ تا R و ۳ تا U هستند. مثلاً

$RRRRUUU$. تعداد حالت‌هایی که این حروف می‌توانند با هم جابه‌جا شوند، درواقع همان تعداد کوتاه‌ترین مسیرها را به ما می‌دهد. این حروف به $\frac{7!}{3!4!}$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند. پس

داریم:

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = 35$$

۱۵

محل قرارگیری حروف A باید به یکی از دو حالت کلی زیر باشد:

حالت اول:

$$A \square A \square A \square A \square$$

حالت دوم:

$$\square A \square A \square A \square A$$

در هر کدام از حالات بالا باید ۴ حرف $TLNT$ را داخل مربع‌ها قرار دهیم که تعداد این جایگشت‌ها در هر حالت با توجه به تکراری بودن T برابر است با:

$$\frac{4!}{3!} = 12$$

بنابراین در مجموع تعداد کل حالات برابر است با:

در حالت دوم

$$\begin{array}{c} 12 \\ \downarrow \\ \text{در حالت اول} \end{array} + 12 = 24$$

۱۶ نکته: اگر N شی داشته که در میان آن‌ها K_1 عدد از نوع اول، K_2 عدد از نوع دوم و ... عدد از نوع n ام باشد به سمتی که $K_1 + K_2 + \dots + K_n = N$

آنگاه تعداد کل جایگشت‌ها از دستور $\frac{N!}{K_1! \times K_2! \times \dots \times K_n!}$ حاصل می‌گردد.

رقم ۴ تنها رقم زوج در این عدد هشت رقمی است، پس لزوماً ۴ در رقم یکان قرار می‌گیرد.

رقم ۳، سه بار و رقم ۵، چهار بار در این عدد تکرار شده است، پس با توجه به رابطه جایگشت با تکرار تعداد اعداد هشت رقمی زوج قابل نوشتن با ارقام این عدد برابر است با:

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35$$

چون سمت چپ عدد مربوطه رقم صفر نمی‌تواند قرار گیرد پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 = 4 \times 6!$$

و از طرفی چون در بین رقم‌های داده‌شده، سه رقم صفر و دو رقم ۳ وجود دارد، پس طبق روابط جایگشت با تکرار، تعداد اعداد هفت‌رقمی که قابل ساخته شدن به کمک این ارقام هستند برابر

است با:

$$\frac{4 \times 6!}{2! \times 3!} = \frac{4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 240$$

«حداکثر یکی از حروف p و y به کار رفته باشد» یعنی « p به کار رفته باشد و y به کار رفته باشد» یا « y به کار رفته باشد و p به کار رفته باشد» یا «هیچ‌کدام به کار

نرفته باشد». تعداد این سه حالت را پیدا می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} p \text{ ندارد.} \quad y \text{ دارد ولی } p \text{ ندارد.} \quad p \text{ دارد ولی } y \text{ ندارد.} \\ \begin{array}{ccc} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & + & \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & + & \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \\ \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) \times 4! & & \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) \times 4! & & \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right) \times 4! \end{array} \end{array}$$

پس حاصل برابر $9 \times 4! = 216$ می‌شود.

ابتدا ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را ۶ کنار هم جابه‌جا می‌شوند در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن ابتدا و انتها و جایگاه‌های میان دانش‌آموزان یازدهم، ۷ جای

خالی داریم. حال برای آنکه هیچ دو دانش‌آموز دوازدهم کنارهم نباشند ابتدا به $\left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right)$ حالت ۴ جای خالی را انتخاب کرده سپس به ۴! حالت دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را جابه‌جا می‌کنیم.

$$\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$$

$$6! \times \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) \times 4! = 6! \times \frac{7!}{4! \times 3!} \times 4! = 7! \times 5!$$

کافی است حرف f را به هر کدام از زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $\{a, c, d, e\}$ اضافه کنیم تا یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از $\{a, b, c, d, e, f\}$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

به‌دست آوریم و مطمئن باشیم شامل f و فاقد b است. پس در جواب این سوال، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از مجموعه $\{a, c, d, e\}$ را به‌دست می‌آوریم که برابر است با:

$$\binom{4}{2} = 6$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعهٔ m عضوی برابر با $\binom{m}{n}$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴